Дискретная математика

Наименование разделов и тем дисциплины:

1. Элементы теории множеств. Отношения, функции, отображения. Множества и классы. Антиномии (парадоксы). Антиномия всемогущества, парадокс «деревенский парикмахер». Антиномия Рассела. Класс разбиений множества. Пустое множество. Универсум. Мощность (кардинальное число, порядок) множества. Отношение принадлежности. Отношение включения. Подмножество, надмножество, собственное подмножество. Операции над множествами. Разбиение и покрытие. Декартово произведение множеств. Соответствие. Пустое соответствие, полное соответствие. Область определения, прообраз (Dom) соответствия. Область значений, образ (Im) соответствия. Всюду определенные и сюръективные соответствия. Образ (im) и прообраз (coim) элемента. Матричное и графовое представление соответствия. Инволюция (обращение) соответствий. Объединение, пересечение, дополнение, произведение соответствий. Функциональные соответствия, их связь с графиками функций. Соответствие Галуа и его роль в проективном распознавании образов. Замкнутое подмножество. Отношение. Кorteж. Бинарное отношение. Рефлексивное, симметричное, антисимметричное, асимметричное, транзитивное отношения. Отношение предпорядка, порядка, толерантности, эквивалентности. Фактормножество множества по отношению. Точная верхняя (sup) и точная нижняя (inf) грани подмножеств. Отношение предпорядка, упорядоченности, строгой упорядоченности. Нечеткие множества. Определение. Способы задания. Операции над нечеткими множествами
2. Алгебраическая система (алгебра). Носитель, основное множество алгебры. Сигнатура алгебры. Универсальная алгебра (собственно алгебра) и реляционная система (модель) как разновидности алгебраической системы (алгебры). Бинарная операция и ее основное множество. Способы задания бинарной операции. Таблица Кэли. Операционный квадрат таблицы Кэли. Группоид. Квазигруппа. Латинский квадрат. Лупа. Полугруппа. Моноид. Группа. Абелева группа. Группа симметрий фигуры. Симметрическая группа (группа подстановок). Иерархия систем с двумя бинарными операциями. Кольцо. Тело. Поле (коммутативное тело). Поле Галуа. Решетка как частично упорядоченное множество и как универсальная алгебра. Диаграмма Хассе.

3. Элементы теории графов Граф. Вершина, ребро, дуга. Неориентированный граф, ориентированный граф (орграф). Кратные ребра (дуги). Петли. Смежные вершины (ребра). Степень вершины. Инцидентные ребро и вершина, дуга и вершина. Укладка графа. Плоский граф. Описание графов: матрица смежности, матрица инцидентности, списки. Изоморфные графы. Подграфы. Компонента связности. Графы k -связные (k -реберносвязные). Дерево. Остовные деревья. Графы и ориентированные графы: аналогии и отличия. Подграфы, ориентированные подграфы и связность. Маршрут, цепь, простая цепь, (простой) цикл. Длина маршрута, расстояние между вершинами. Одноместные операции: удаление или добавление ребра или вершины, стягивание ребра (отождествление пары смежных вершин), подразбиение ребра. Двуместные операции: соединение, сложение, различные виды умножений и др. средства для анализа и синтеза графов с заданными свойствами. Обходы графов. Эйлеров путь в графе. Задача о кенигсбергских мостах, головоломки. Эйлеров цикл. Теорема о существовании эйлерова пути. Теорема об эйлеровом пути в связном графе без вершин нечетной степени. Алгоритм нахождения эйлерова цикла. Оценка вычислительной сложности алгоритма. Гамильтонов путь в графе, гамильтонов цикл. NP-полные задачи. Алгоритм нахождения всех гамильтоновых циклов в графе. Деревья, их свойства и представления. Вес дуги (ребра). Взвешенные графы и орграфы. Длина пути в обычном и во взвешенном орграфе, расстояние между вершинами. Задача коммивояжера. Алгоритмы поиска субоптимального решения задачи коммивояжера. Алгоритмы Краскала и Прима поиска минимального остовного дерева. Контур, его длина и ее знак. Требование к знакам всех контуров для того, чтобы элементарный путь был кратчайшим. Практическая интерпретация весов. Алгоритмы нахождения кратчайшего пути в ориентированном графе. Сведение задачи в неориентированном (и вообще, в любом) графе к задаче в ориентированном графе. Алгоритм Форда-Беллмана нахождения расстояния от источника до всех вершин. Доказательство правильности алгоритма. Оценка временной сложности алгоритма. Алгоритм Дейкстры нахождения расстояния от источника до всех остальных вершин в графе с неотрицательными весами дуг. Приложения алгоритма Дейкстры для решения задач маршрутизации в сетях. Лемма о перенумерации вершин. Алгоритм нумерации вершин бесконтурного графа. Утверждение о вершине, в которую не заходит ни одна дуга, использование стека для накапливания таких вершин. Сравнение скорости роста двух функций (принятые обозначения) и оценка сложности алгоритма. Алгоритм нахождения расстояний от источника до всех вершин в бесконтурном графе (с предварительной перенумерацией вершин). Нахождение кратчайших путей между всеми парами вершин в ориентированном графе — транзитивное замыкание отношения. Алгоритм вычисления расстояний между всеми парами вершин — метод Флойда. Знаковые графы и их практическое применение. Задачи из области социологии малых групп, экономики и политики. Теорема о структуре (теорема Харари о балансе). Законы

передачи импульса во взвешенно/знаковых моделях на орграфах. Контуры положительной и отрицательной обратной связи и устойчивость/изменчивость моделей на орграфах. Сети Петри. Формальное определение сети Петри. Функционирование сети Петри. Конечные разметки сети. Ограниченность. Моделирование на сетях Петри.

4. Элементы теории кодирования
Общая постановка задачи кодирования. Подстановочные и перестановочные криптограммы. Шифр Тритемиуса. Экономное кодирование. Код Фано. Проблемы использования неравномерных кодов. Однозначно-декодируемые коды. Префиксные коды. Условия однозначной декодируемости. Оптимальный код. Код Хаффмена. Кодирование и декодирование при передаче информации по каналам связи с шумом. Математическая модель системы связи. Блочный двоичный (m,n) -код и функции, определяющие схему кодирования и схему декодирования. Функция ошибок. Коды с обнаружением ошибок и коды с исправлением ошибок. Аксиомы расстояний и расстояние Хемминга. Вес слова, вес поразрядной суммы. Теорема о наименьшем расстоянии между кодовыми словами, необходимом для обнаружения ошибок; теорема о наименьшем расстоянии между кодовыми словами, необходимом для исправления ошибок. Преимущества матричного кодирования. Порождающая матрица кода. Требование к матрице, достаточное для различия кодов разных исходных слов. Групповые коды Хемминга, исправляющие однократную ошибку. Схема кодирования и схема декодирования Хемминга.